

Correction SIGMA n°2C

Exercice 1 - Manipuler les racines carrées**Exercice 1A (cours)**

Résoudre l'équation et l'inéquation suivante :

1. Tout d'abord, on résout $x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4$. On résout alors la première équation pour $x \in [4; +\infty[$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-4} = 2 \\ \iff & (\sqrt{x-4})^2 = 2^2 \\ \iff & x - 4 = 4 \\ \iff & x = 8 \end{aligned}$$

Or $8 \geq 4$ donc l'équation n'a qu'une unique solution

$$\mathcal{S} = \{8\}.$$

2. On résout tout d'abord, $x^2 + 1 \geq 0$. Or cette inéquation est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} \geq 1 & \iff x^2 + 1 \geq 1^2 \\ & \iff x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cette inégalité est ainsi toujours vérifiée. Donc

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}.$$

Exercice 1B (Application)

1. On résout dans un premier temps l'inéquation $x^2 - 1 \geq 0 \iff (x - 1)(x + 1) \geq 0$. On a donc pour tout $x \in] - \infty; -1] \cup [1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} \geq 3 & \iff x^2 - 1 \geq 9 \\ & \iff x^2 \geq 10 \\ & \iff |x| \geq \sqrt{10} \\ & \iff x \leq -\sqrt{10} \text{ ou } x \geq \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} =] - \infty; -\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10}; +\infty[$$

2. On résout tout d'abord $x + 5 \geq 0 \iff x \geq -5$. Or comme une racine carrée est toujours positive,

$$\text{l'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = [-5; +\infty[.$$

3. Simplifiez l'expression suivante en utilisant la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2}{x - \sqrt{x^2 + 2}} \\ &= \frac{x^2(x + \sqrt{x^2 + 2})}{(x - \sqrt{x^2 + 2})(x + \sqrt{x^2 + 2})} \\ &= \frac{x^3 + x^2\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 - (x^2 + 2)} \\ &= -\frac{1}{2}(x^3 + x^2\sqrt{x^2 + 2}) \end{aligned}$$

Exercice 2 - Résoudre une équation

Exercice 2A (cours)

1. On résout l'équation pour $x \neq \frac{4}{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{3x-4} = 1 &\iff x+3 = 3x-4 \\ &\iff 2x = 7 \\ &\iff x = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{7}{2} \right\}.$$

2. On peut résoudre l'équation $4x^2 - 4x + 1 = 0$ en utilisant le discriminant ou en reconnaissant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 = 0 &\iff (2x-1)^2 = 0 \\ &\iff 2x-1 = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Exercice 2B (Application)

1. On résout l'équation

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 4x = 0 &\iff x(x^2 - 4x + 4) = 0 \\ &\iff x(x-2)^2 = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_1 = \{0; 2\}.$$

2. On résout l'équation

$$\begin{aligned} x \ln(x+3) = x &\iff x \ln(x+3) - x = 0 \\ &\iff x(\ln(x+3) - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x+3) - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x+3) = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x+3 = e \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = e-3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_3 = \{0; e-3\}.$$

Exercice 3 - Utiliser les formules de ln ou de exp

Exercice 3A (cours)

1. On commence par résoudre les équations $x - 4 > 0 \iff x > 4$ et $x + 4 > 0 \iff x > -4$. Pour tout $x \in]4; +\infty[$ on résout désormais

$$\begin{aligned} \ln(x+4) + \ln(x-4) = 0 &\iff \ln((x+4)(x-4)) = 0 \\ &\iff \ln(x^2 - 16) = 0 \\ &\iff x^2 - 16 = 1 \\ &\iff x^2 - 17 = 0 \\ &\iff x^2 = 17 \\ &\iff x = \pm\sqrt{17} \end{aligned}$$

Cependant, le nombre $-\sqrt{17}$ n'appartient pas à l'ensemble $]4; +\infty[$. L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \{\sqrt{17}\}.$$

2. Pour résoudre l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$, on pose le changement de variable $X = e^x > 0$. On a donc

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \iff X^2 + 2X - 3 = 0 \quad \text{et } X > 0$$

On résout l'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$ en utilisant le discriminant $\Delta = 4 - 4 \times (-3) = 16$. Les solutions de cette équation sont donc

$$X_1 = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \quad \text{ou} \quad X_2 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

La solution X_1 est négative donc elle ne convient pas. L'unique solution vérifie alors $e^x = 1 \iff x = 0$. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{0\}.$$

Exercice 3B (Application)

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} A = e^{-3\ln(4)} & B = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e}) & C = \ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}) \\ = 4^{-3} & = \ln(e^2) - \frac{1}{2}\ln(e) & = \ln(\sqrt{\exp(-2)}) \\ = \boxed{\frac{1}{64}} & = \boxed{2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}} & = \ln(e^{-1}) \\ & & = \boxed{-1} \end{array}$$

2. Pour résoudre l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$, on pose le changement de variable $X = e^x > 0$. On a donc

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \iff X^2 + 2X - 3 = 0 \quad \text{et } X > 0$$

On résout l'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$ en utilisant le discriminant $\Delta = 4 - 4 \times (-3) = 16$. Les solutions de cette équation sont donc

$$X_1 = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \quad \text{ou} \quad X_2 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

La solution X_1 est négative donc elle ne convient pas. L'unique solution vérifie alors $e^x = 1 \iff x = 0$. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{0\}.$$

Exercice 4 - Tracer des courbes

Exercice 4A (cours)

Tracer sur un même graphique les courbes d'équations

1. $y = -2$

2. $y = -2x + 3$

3. $y = e^x$

Exercice 4B (Application)

Tracer sur un même graphique les courbes d'équations

1. $y = 3x + 1$

2. $y = x^2 - 4x + 3$

3. $y = \frac{1}{x}$

Exercice 5 - Manipuler des valeurs absolues

Exercice 5A (cours)

1. On résout l'équation

$$|x + 1| = 1 \iff x + 1 = 1 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -1$$

$$\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S}_1 = \{-2; 0\}.$$

2. On résout l'équation $x + 4 \geq 0 \iff x \geq -4$ et $1 - 2x \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$. On a donc 3 cas :

(a) **Cas où** $x < -4$: L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |x + 4| - |1 - 2x| = 2 &\iff -(x + 4) - (1 - 2x) = 2 \\ &\iff x - 5 = 2 \\ &\iff x = 7 \end{aligned}$$

Cette équation n'a donc aucune solution sur cet intervalle.

(b) **Cas où** $-4 \leq x < \frac{1}{2}$: L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |x + 4| - |1 - 2x| = 2 &\iff (x + 4) - (1 - 2x) = 2 \\ &\iff 3x + 3 = 2 \\ &\iff 3x = -1 \\ &\iff x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Il y a alors une solution sur $[-4; 1/2[$: $x = -1/3$.

(c) **Cas où** $\frac{1}{2} \leq x$: L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |x + 4| - |1 - 2x| = 2 &\iff x + 4 + (1 - 2x) = 2 \\ &\iff -x + 5 = 2 \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

Il y a alors une solution sur $[1/2; +\infty[$: $x = 3$.

Au final l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_2 = \left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}$.

3. D'après le cours,

$$|x| > 3 \iff x < -3 \text{ ou } x > 3$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_3 =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

Exercice 5B (Application)

1. D'après le cours,

$$|x| > 3 \iff x < -3 \text{ ou } x > 3$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_3 =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

2. Afin de voir quels sont les cas possibles, on utilise le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $4x - 2$	-	0	+	+
Signe de $x + 3$	-	-	0	+

(a) **1er Cas** : $x \leq -3$. Dans ce cas, les 2 quantités dans les valeurs absolues sont négatives. Donc

$$\begin{aligned} |4x - 2| \leq |x + 3| &\iff -(4x - 2) \leq -(x + 3) \\ &\iff -4x + 2 \leq -x - 3 \\ &\iff 5 \leq 3x \\ &\iff \frac{5}{3} \leq x \end{aligned}$$

On en déduit qu'il n'y a aucune solutions sur cet intervalle.

(b) **2nd Cas** : $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} |4x - 2| \leq |x + 3| &\iff (4x - 2) \leq -(x + 3) \\ &\iff 4x - 2 \leq -x - 3 \\ &\iff 5x \leq -1 \\ &\iff x \leq -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

On en déduit que l'intervalle, $\left[-3; -\frac{1}{5}\right]$ est solution.

(c) **3ème Cas** : $x \geq 1$. Dans ce cas, les 2 quantités dans les valeurs absolues sont positives. Donc

$$\begin{aligned} |4x - 2| \leq |x + 3| &\iff (4x - 2) \leq (x + 3) \\ &\iff 3x \leq 5 \\ &\iff x \leq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

On en déduit que l'intervalle, $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right]$ est solution.

En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left[-3; -\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right]$

3. On résout l'équation $|x^2 - 4| - |2x - 1| = 0$. Afin de voir quels sont les cas possibles, on utilise le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	$1/2$	2	$+\infty$
Signe de $x^2 - 4$	+	0	-	-	+
Signe de $2x + 1$	-	-	0	+	+

- (a) **1er Cas** : $x \in]-\infty; -2]$. On s'aperçoit que dans ces deux cas, $x^2 - 4$ est positif et $2x - 1$ est négatif. Donc

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| - |2x - 1| = 4 &\Leftrightarrow (x^2 - 4) + (2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 + 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant lié à cette équation du second degré est $\Delta = 4 - 4 \times 5 \times (-1) = 24$. Les deux solutions sont alors $x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{2} = -1 - \sqrt{6}$ et $x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{2} = -1 + \sqrt{6}$. La solution x_2 n'est pas dans l'intervalle regardé. En revanche, $-1 - \sqrt{6} \leq -2$

On en déduit que sur cet intervalle, l'équation a une solution $-1 - \sqrt{6}$.

- (b) **2nd Cas** : $-2 \leq x \leq 1/2$. Dans ce cas, les deux quantités sont négatives.

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| - |2x - 1| = 0 &\Leftrightarrow -(x^2 - 4) + (2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 4 + 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times 3 = 16$. Cette équation a donc deux solutions $x_3 = \frac{-2 - 4}{-2} = 3$ et $x_4 = \frac{-2 + 4}{-2} = -1$

On en déduit que sur cet intervalle, l'équation a une solution : -1 .

- (c) **3ème Cas** : $1/2 \leq x \leq 2$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| - |2x - 1| = 0 &\Leftrightarrow -(x^2 - 4) - (2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation ont déjà été calculées.

$$x_1 = -1 - \sqrt{6} \quad \text{et} \quad x_2 = -1 + \sqrt{6}$$

Or $-1 - \sqrt{6} < 0$ donc cette solution n'est pas dans le domaine étudié. D'un autre côté,

$$2 < \sqrt{6} < 3 \iff 1 < -1 + \sqrt{6} < 2$$

$$\implies \frac{1}{2} < x_2 < 2$$

donc cette solution est dans l'intervalle étudié. On en déduit que sur cet intervalle,

l'équation a une solution : $-1 + \sqrt{6}$.

4. 4ème Cas : $2 < x$. Dans ce cas, les deux quantités sont positives.

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| - |2x - 1| = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 4) - (2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \end{aligned}$$

On a déjà déterminé les solutions de cette équation et donc $x_3 = 3$ et $x_4 = -1$

On en déduit que sur cet intervalle, l'équation a une solution : 3.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{-1 - \sqrt{6}; -1; -1 + \sqrt{6}; 3\}$.

Exercice 6 - Montrer qu'une suite est minorée ou majorée

Exercice 6A (cours)

On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq 2 \times 3^n\}$.

- **Initialisation** : On a bien $u_0 = 2 \times 3^0 = 2$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a donc $u_n \geq 2 \times 3^n$. Comme $u_{n+1} \geq 3u_n$, on a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} \geq 3u_n &\implies u_{n+1} \geq 3 \times 2 \times 3^n \\ &\implies u_{n+1} \geq 2 \times 3^{n+1} \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2 \times 3^n$.

Exercice 6B (Application)

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq 1 \text{ et } u_n \text{ existe}\}$.

- **Initialisation** : On a bien $u_0 = 1 \geq 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n > 0$. u_n existe et $u_n + 4 > 0$ donc on peut prendre le logarithme et u_{n+1} existe. De plus,

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\implies 4 + u_n > 5 \\ &\implies \ln(4 + u_n) > \ln(5) \\ &\implies u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

2. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \left\{ |u_n - 2| \geq \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}$.

- **Initialisation** : On a bien $|u_0 - 2| = |1 - 2| = 1 \leq 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a donc $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{4}|u_n - 2|$, on a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{4}|u_n - 2| &\implies |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &\implies |u_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Exercice 7 - Déterminer la probabilité d'une union finie.

Dans une urne, il y a 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement 3 boules avec remise dans cette urne on note les évènements A_i : " Tirer la boule n° 5 au $i^{\text{ème}}$ lancer". On définit enfin les évènements B_i : "On obtient au moins une boule n° 5 lors des i premiers lancers". On a $B_1 = A_1$ donc

$$P(B_1) = P(A_1) = \frac{1}{5}.$$

On a $B_2 = A_1 \cup A_2$. Les évènements A_1 et A_2 ne sont pas disjoints (mais ils sont indépendants) donc on utilise le crible de Poincaré :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

Enfin, $B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Les évènements A_1 , A_2 et A_3 ne sont pas disjoints (mais ils sont indépendants) donc on utilise le crible de Poincaré :

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{3}{25} + \frac{1}{125} \\ &= \frac{61}{125} \end{aligned}$$

Exercice 7B (Application)

On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n lancers d'un dé à 4 faces.

1. Afin de calculer la probabilité de l'évènement C , on introduit les évènements A_k : "On obtient le nombre 4 au $k^{\text{ème}}$ tirage". Alors on a $C = (A_1 \cap A_n)$. En appliquant les formules du cours (on rappelle que les évènements A_1 et A_n sont indépendants,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 \cap A_n) \\ &= P(A_1) \times P(A_n) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

2. On considère les évènements D : "Les tirages 1 et 2 amènent chacun un 4", c'est à dire $D = A_1 \cap A_2$, E : "Les tirages 2 et 3 amènent chacun un 4", i.e. $E = A_2 \cap A_3$ et F : "Les tirages 3 et 4 amènent chacun un nombre inférieur ou égal à 4", i.e. F est un évènement certain. On utilise alors le crible

de Poincaré sachant que

$$P(D) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(E) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(F) = 1$$

$$P(D \cap E) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

$$P(D \cap F) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{16}$$

Enfin $P(E \cap F) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{16}$ et de même $P(D \cap E \cap F) = P(D \cap E) = \frac{1}{64}$. On a alors

$$\begin{aligned} P(D \cup E \cup F) &= P(D) + P(E) + P(F) - P(D \cap E) - P(D \cap F) - P(E \cap F) + P(D \cap E \cap F) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 1 - \frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le fait que $D \cup E \cup F = F$ et donc $P(D \cup E \cup F) = 1$.

Exercice 8 - Déterminer la probabilité d'une intersection finie.

Exercice 8A (cours)

Dans une urne, il y a 3 boules vertes et 7 boules rouge. On tire 2 boules l'une après l'autre. On considère l'évènement V_k : "On tire la boule verte au $k^{\text{ème}}$ tirage"

1. On remet la boule tirée dans l'urne. Les évènements V_1 et V_2 sont donc indépendants et

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P(V_2) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}.$$

2. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne. Cette fois ci les deux évènements ne sont pas indépendants donc on utilise la formule des probabilités composées,

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$$

Exercice 8B (Application)

On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer 3 tirages dans une urne contenant 2 boules noires et 3 boules rouges. On suppose que les tirages se font sans remise. On introduit alors les évènements N_k : "On a pioché une boule noire au $k^{\text{ème}}$ tirage" et R_k : "On a pioché une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ ". On compare alors $P(R_1 \cap N_2 \cap R_3)$ et $P(N_1 \cap R_2 \cap N_3)$. On a d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap N_2 \cap R_3) &= P(R_1) \times P_{R_1}(N_2) \times P_{R_1 \cap N_2}(R_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) &= P(N_1) \times P_{N_1}(R_2) \times P_{N_1 \cap R_2}(N_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

On a donc deux fois plus de chances d'obtenir R-N-R que N-R-N

Exercice 9 - Inverser une matrice en utilisant une formule.

Exercice 9A (cours)

1. On calcule le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ qui est $1 \times (-2) - 1 \times 3 = -5 \neq 0$. Donc la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On calcule le déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ qui est $1 \times (-6) - (-2) \times 3 = -6 + 6 = 0$.

La matrice B n'est pas inversible.

Exercice 9B (Application)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi on a bien

$$A^2 - A - 2I = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} A^2 - A - 2I = 0 &\iff A^2 - A = 2I \\ &\iff A^2 - A = 2I \\ &\iff A(A - I) = 2I \\ &\iff A \times \frac{1}{2}(A - I) = I \end{aligned}$$

Donc d'après la définition,

la matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B^2 - 3B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va montrer que la matrice B n'est pas inversible à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. Supposons que la matrice B soit inversible, il existe alors une matrice B^{-1} et donc

$$B^{-1}(B^2 - 3B) = B^{-1} \times 0_3 \iff B - 3I_3 = 0_3$$

Or

$$B - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas la matrice nulle. Il est donc absurde de supposer que B est inversible.

La matrice B n'est pas inversible.

Exercice 10 - Manipuler une inégalité mettant en jeu une somme.

Exercice 10A (cours)

1. Soit $x \geq 0$. On a l'équivalence $e^x \geq 1 + x \iff e^x - 1 - x \geq 0$. On pose alors la fonction

$$f : x \rightarrow e^x - 1 - x$$

définie sur $[0; +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f'(x) = e^x - 1$$

On résout alors

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff e^x - 1 > 0 \\ &\iff e^x > 1 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc croissante sur $[0; +\infty[$. Or $f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$. Donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$.

En conclusion, $\forall x \geq 0, e^x \geq 1 + x$.

2. On a alors

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbb{N}, \quad e^k &\geq 1 + k \\
 \implies \sum_{k=0}^n e^k &\geq \sum_{k=0}^n 1 + k \\
 \implies \sum_{k=0}^n e^k &\geq \sum_{k=0}^n 1 + \sum_{k=0}^n k \\
 \implies \sum_{k=0}^n e^k &\geq n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\
 \implies \boxed{\sum_{k=0}^n e^k &\geq \frac{(n+2)(n+1)}{2}}
 \end{aligned}$$

Exercice 10B (Application)

1. On a

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x-1)} - \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}$$

Or pour tout $x \geq 2$, on a $x^2 \geq x^2 - x$ et donc $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2 - x}$. On conclut

$$\boxed{\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

2. On en déduit

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\
 &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}
 \end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique donc

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}}$$

Exercice 11 - Calculer des probabilités à l'aide du dénombrement.

Exercice 11A (cours)

On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1. L'univers est $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ et $\text{card}(\Omega) = 36$. On compte alors le nombre de possibilités pour obtenir un double avec deux dés :

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

Il y a 6 possibilités. La probabilité d'obtenir 8 est donc

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

2. De même, on compte le nombre de possibilités pour obtenir 6 avec deux dés :

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$

Il y a 5 possibilités. La probabilité d'obtenir 6 est donc

$$p = \frac{5}{36}.$$

3. On cherche à compter le nombre de possibilités pour obtenir 24 en faisant le produit de 2 dés :

$$(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$$

Il y a 4 possibilités. La probabilité d'obtenir 24 en faisant le produit est donc

$$p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Exercice 11B (Application)

On considère une urne contenant 4 boules numéro 1, 4 boules numéro 2, 4 boules numéro 3 et 4 boules numéro 4 (L'urne contient donc 16 boules au total).

1. Avant de débiter l'exercice, comptons le nombre de possibilités. On tire trois boules dans l'ordre et avec remise. L'ensemble des résultats de cette expérience (i.e. Ω) est une 3-liste de l'ensemble $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.
Donc

$$\text{card}(\Omega) = 16^3$$

(a) On note A l'évènement obtenir 3 numéros 4. On compte le nombre d'éléments de A . On note F l'ensemble des numéros 4 ($\text{card}(F) = 4$). L'ensemble A est donc une 3-liste de F . On a ainsi :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4^3}{16^3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

(b) On note B l'évènement "obtenir 3 fois le même numéro". Il sera plus facile ici de dénombrer les évènements (pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$) :

$$B_k : \text{"obtenir 3 fois le numéro } k\text{"}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on a alors (même raisonnement que pour la question 1) $\text{card}(B_k) = 4^3$ et $p(B_k) = \frac{1}{64}$. On sait également que $B = \bigcup_{k=1}^4 B_k$ et que les évènements B_k sont incompatibles deux à deux. Donc

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=1}^4 B_k\right) = \sum_{k=1}^4 P(B_k) = 4 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{16}$$

(c) On note C l'évènement "aucune des numéros sorti n'est un 3". On note G l'ensemble des numéros qui ne sont pas des 3 ($\text{card}(G) = 12$). L'ensemble C est donc une 3-liste de G et donc

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{12^3}{16^3} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$$

L'évènement que l'on voulait calculer est \bar{C} : "Au moins un des numéros tirés est un 3.

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = \frac{37}{64}.$$

2. De la même façon, comptons le nombre de possibilités. On tire trois boules dans l'ordre et sans remise. L'ensemble des résultats de cette expérience (i.e. Ω) est un 3-Arrangement de l'ensemble $\llbracket 1, 4 \rrbracket$. Donc

$$\text{card}(\Omega) = 16 \times 15 \times 14$$

- (a) On note A l'évènement obtenir 3 numéros 4. On compte le nombre d'éléments de A . On note F l'ensemble des numéros 4 ($\text{card}(F) = 4$). L'ensemble A est donc un 3-Arrangement de F . On a ainsi :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4 \times 3 \times 2}{16 \times 15 \times 14} = \frac{1}{2 \times 5 \times 14} = \frac{1}{140}$$

- (b) On note B l'évènement "obtenir 3 fois le même numéro". Il sera plus facile ici de dénombrer les évènements (pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$) :

$$B_k : \text{"obtenir 3 fois le numéro } k\text{"}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on a alors (même raisonnement que pour la question (a)) $\text{card}(B_k) = 4 \times 3 \times 2$ et $p(B_k) = \frac{1}{140}$. On sait également que $B = \bigcup_{k=1}^4 B_k$ et que les évènements B_k sont incompatibles deux à deux. Donc

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=1}^4 B_k\right) = \sum_{k=1}^4 P(B_k) = 4 \times \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$$

- (c) On note C l'évènement "aucune des numéros sorti n'est un 4". On note G l'ensemble des numéros qui ne sont pas des 4 ($\text{card}(G) = 12$). L'ensemble C est donc une 3-Arrangement de G et donc

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{12 \times 11 \times 10}{16 \times 15 \times 14} = \frac{11}{2 \times 1 \times 14} = \frac{11}{28}$$

L'évènement que l'on voulait calculer est \bar{C} : "Au moins un des numéros tiré est un 4.

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = \frac{17}{28}$$

Exercice 12 - Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète finie.

Exercice 12A (cours)

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs 0,1,2 ou 3. On donne

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Comme les évènements $(X = 2)$ et $(X = 3)$ sont équiprobables, On a $P(X = 2) = P(X = 3)$. De plus, comme $(X = i)_{i \in \{0,3\}}$ est un système complet d'évènements alors

$$\begin{aligned} P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) &= 1 \\ \iff \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 2P(X = 2) &= 1 \\ \iff 2P(X = 2) &= 1 - \frac{4}{6} \\ \iff 2P(X = 2) &= \frac{1}{3} \\ \iff P(X = 2) = P(X = 3) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2. La loi de X , c'est tout simplement les probabilités calculées à la question 1. On peut le récapituler dans un tableau :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On utilise la formule pour calculer l'espérance :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=0}^3 kP(X = k) \\
 &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) \\
 &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \\
 &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Pour déterminer la variance, on commence par calculer :

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=0}^3 k^2P(X = k) \\
 &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) \\
 &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} \\
 &= \frac{16}{6} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

On n'oublie pas de donner la variance à l'aide de la formule de Koëinig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9}$$

Exercice 12B (Application)

On tire successivement 2 dés à 6 faces. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

1. L'écart maximum sera obtenue en tirant obtenant 6 sur un dé et 1 sur l'autre. L'écart minimum est 0 si l'on tire deux fois le même nombre. Ainsi,

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$$

On note pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, l'évènement A_k : "Obtenir le n° k au premier tirage" et B_k : "Obtenir le n° k au second tirage". Les évènements A_k, B_j sont indépendants pour tout $(j, k) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$.

$$\begin{aligned}
 P(X = 5) &= P((A_6 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_6)) \\
 &= P(A_6 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_6) \\
 &= P(A_6)P(B_1) + P(A_1)P(B_6) \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

On peut également résoudre ce problème à l'aide du dénombrement. Ω est l'ensemble des 2-liste de l'ensemble $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Ainsi, $\text{card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. Or

$$(X = 4) = \{(1, 5); (2, 6); (6, 2); (5, 1)\}$$

Ainsi $\text{card}(X = 4) = 4$ et donc

$$P(X = 4) = \frac{\text{card}(X = 4)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

De la même façon,

$$(X = 3) = \{(1, 4); (2, 5); (3, 6); (6, 3); (5, 2); (4, 1)\}$$

Ainsi $\text{card}(X = 3) = 6$ et donc

$$P(X = 3) = \frac{\text{card}(X = 3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

,

$$(X = 2) = \{(1, 3); (2, 4); (3, 5); (4, 6); (6, 4); (5, 3); (4, 2); (3, 1)\}$$

Ainsi $\text{card}(X = 2) = 8$ et donc

$$P(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

De même,

$$(X = 1) = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 6); (6, 5); (5, 4); (4, 3); (3, 2); (2, 1)\}$$

Ainsi $\text{card}(X = 1) = 10$ et donc

$$P(X = 1) = \frac{\text{card}(X = 1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

et

$$(X = 0) = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$$

Ainsi $\text{card}(X = 0) = 6$ et donc

$$P(X = 0) = \frac{\text{card}(X = 0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

En conclusion (on vérifie que la somme fait bien 1),

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

2. On calcule alors l'espérance de la variable aléatoire X ,

$$E(X) = 0 + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4) + 5 \times P(X = 5)$$

$$= 0 + \frac{5}{18} + \frac{4}{9} + \frac{3}{6} + \frac{4}{9} + \frac{5}{18}$$

$$= \frac{5}{18} + \frac{8}{18} + \frac{9}{18} + \frac{8}{18} + \frac{5}{18}$$

$$\boxed{= \frac{35}{18}}$$

Afin de calculer la variance, on calcule $E(X^2)$ avec le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) + 4^2 \times P(X = 4) + 5^2 \times P(X = 5) \\ &= \frac{5}{18} + \frac{8}{9} + \frac{9}{6} + \frac{16}{9} + \frac{25}{18} \\ &= \frac{5}{18} + \frac{16}{18} + \frac{27}{18} + \frac{32}{18} + \frac{25}{18} \\ &= \frac{105}{18} = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

La variance est alors donnée par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 \\ &= \frac{1890 - 841}{324} \\ &= \frac{1049}{324} \end{aligned}$$

Exercice 13 - Reconnaître une loi uniforme, de Bernoulli, Binomiale.

Exercice 13A (cours)

On tire successivement et avec remise 6 cartes d'un paquet de 32 cartes. Dans les cas suivants, déterminer en le justifiant la loi de X , son espérance et sa variance.

1. On note X le nombre de valets obtenus. On peut obtenir entre 0 et n valets donc $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. On compte le nombre de succès d'une répétition d'épreuves de Bernoulli (Obtenir un valet) ayant pour probabilité de succès $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Donc X suit une loi binomiale de paramètre 6 et $\frac{1}{8}$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(6, 1/8) \text{ et } E(X) = \frac{3}{4}, V(X) = 6 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{32}$$

2. On note X la variable aléatoire valant 1 si l'on a que des figures (rois, dames et valets) et 0 sinon. On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ donc X suit une loi de Bernoulli. On calcule $P(X = 1) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. Ainsi

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{3}{8}\right) \text{ et } E(X) = \frac{3}{8}, V(X) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$$

3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirage. $X(\Omega) = \{6\}$ donc X est une loi certaine. Ainsi

$$E(X) = 6 \text{ et } V(X) = 0.$$

4. On note X la variable aléatoire valant 1 si un coeur tombe, 2 si un carreau tombe, 3 si un trèfle tombe et 4 si un pique tombe. On a $X(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$. La probabilité est la même pour les événements $P(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 2) = \frac{1}{4}$, $P(X = 3) = \frac{1}{4}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{4}$. Il s'agit donc d'une loi uniforme :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(1, 4) \text{ et } E(X) = \frac{5}{2}, V(X) = \frac{16 - 1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Exercice 13B (Application)

Une grenouille se déplace sur un axe gradué. Elle commence sur la case 0. Elle peut

- Se déplacer de +2 cases avec probabilité $1/2$.
- Rester sur la même case avec probabilité $1/6$.
- Reculer d'une case (faire -1).

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. La grenouille ne peut qu'avancer de deux cases, rester au même endroit ou reculer d'une case. Ces 3 événements forment un système complet d'événements et si l'on note x la probabilité que la grenouille recule d'une case, on obtient l'équation

$$x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 \iff \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

2. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté de deux cases en avant. On a tout d'abord $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. On répète n fois une épreuve de Bernoulli (probabilité de succès $1/2$) de manière identique et indépendante. Ainsi X_n suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)}.$$

On a alors

$$\boxed{E(X_n) = \frac{n}{2} \text{ et } V(X_n) = \frac{n}{4}}$$

3. On note Y_n le nombre de fois où la grenouille est resté sur la même case. On a tout d'abord $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. On répète n fois une épreuve de Bernoulli (probabilité de succès $1/6$) de manière identique et indépendante. Ainsi Y_n suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{6}$

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/6)}.$$

On a alors

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{n}{6} \text{ et } V(Y_n) = \frac{5n}{36}}$$

4. On note Z_n la variable aléatoire égale à la position où est arrivée la grenouille. On a $Z_n = 2X_n + 0 \times Y_n - (n - X_n - Y_n)$ donc

$$\boxed{Z_n = 3X_n + Y_n - n}.$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= E(3X_n + Y_n - n) \\ &= E(3X_n) + E(Y_n) - n \\ &= 3E(X_n) + E(Y_n) - n \\ &= \frac{3n}{2} + \frac{n}{6} - n \\ &= \boxed{\frac{2n}{3}} \end{aligned}$$

Exercice 14 - Résoudre un système linéaire.

Exercice 14A (cours)

Résoudre les systèmes suivants

1. On résout le système

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 2y = 5 \end{cases} \quad 2L_2 - L_1 \rightarrow L_2$$

$$\iff \begin{cases} 2x = 1 - 10 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Le système a une unique solution : $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2} \right) \right\}$.

2. On résout le système

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad 3L_1 - L_2 \rightarrow L_2$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{3}{2}y, y \right), y \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 14B (Application)

Résoudre les systèmes suivants :

1. On résout le système :

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ 5z = 0 \end{cases} \quad L_2 + L_3 \rightarrow L_3$$

$$\iff \begin{cases} 2x = 1 - \frac{1}{2} \\ 2y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Le système admet donc une unique solution : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$.

2. On résout le système :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ y - 4z = 0 \\ -y + 4z = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} 2L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ 2L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\
 &\iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ y - 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} && L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \\
 &\iff \begin{cases} 2x = -10z \\ y = 4z \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -5z \\ y = 4z \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -5z \\ 4z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 15 - Inverser une matrice.

Exercice 15A (cours)

1. On utilise la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{array} \right) & \quad L_1 - 2L_2 \rightarrow L_2
 \end{aligned}$$

La matrice A est inversible car les pivots sont non nuls.

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right) & \quad \begin{array}{l} 5L_1 - 3L_2 \rightarrow L_1 \\ \cdot \end{array} \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) & \quad \begin{array}{l} (1/10)L_1 \rightarrow L_1 \\ (1/5)L_2 \rightarrow L_2 \end{array}
 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. On applique le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -5 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 2L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ 2L_3 - 5L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 2 \end{array} \right) \quad L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \end{array}$$

La méthode de Gauss a fait apparaître 3 pivot dont un est nul.

La matrice B n'est pas inversible.

Exercice 15B (Application)

1. On applique le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -5 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 2L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ 2L_3 - 5L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 2 \end{array} \right) \quad L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \end{array}$$

La méthode de Gauss a fait apparaître 3 pivot dont un est nul.

La matrice B n'est pas inversible.

2. On calcule l'inverse de la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ à l'aide du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 7 & -4 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2
\end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 2L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ 2L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 7 & -4 & -1 & 2 & 0
\end{array} \right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 6 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & -4 & 6 & 2 & -14
\end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 + 3L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 - 7L_2 \rightarrow L_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
4 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & -4 & 6 & 2 & -14
\end{array} \right) \quad L_3 + 2L_1 \rightarrow L_1 \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 7
\end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}L_1 \rightarrow L_1 \\ \frac{1}{-4}L_3 \rightarrow L_3 \end{array}
\end{array}$$

Les pivots étant tous non nuls,

la matrice C est inversible et $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 - Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle.